ALGÈBRES VERTEX ET ALGÈBRES À FACTORISATION

DAMIEN LEJAY

5 décembre 2013

Résumé

Vous êtes sur le point de lire les notes d'un exposé introductif aux algèbres vertex et à leurs liens avec les algèbres à factorisation, à la Costello et Gwilliam. Il est probable que celles-ci contiennent plusieurs coquille, erreurs et imprécisions.

1 ALGÈBRES VERTEX

Le formalisme des algèbres vertex est apparu en physique lors de l'étude des théories conformes des champs. En reprenant les axiomes de Wightman, Victor Kac [2] montre comment, en dimension 2 et en ajoutant les symétries conformes, on obtient naturellement le formalisme dont nous allons parler.

1.1 *Distributions formelles sur le disque épointé*

L'analogue algébrique de l'espace de Schwartz $\mathscr{S}$ des fonctions à décroissances rapides sur le disque épointé $\mathbb{D}^*$ est l'espace des polynômes de Laurent $\mathbb{C}[z,z^{-1}]$. On appelle *distribution formelle* toute forme linéaire sur cet espace. Il est clair qu'une telle forme λ est uniquement déterminée par la suite de ses valeurs

$$a_n = \lambda(z^{n-1}).$$

Tandis que dans le cas classique, toute fonction dans $\mathscr{S}$ induit une distribution tempérée à l'aide du produit de dualité

$$\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{D}^*} f\overline{g}\,\mathrm{d}\sigma,$$

dans le cas formel, celui-ci prend la forme

$$\langle \mathrm{P}|\mathrm{Q}\rangle = \int_{\mathrm{S}^1} \mathrm{P}(z)\mathrm{Q}(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{Res}_0(\mathrm{PQ}).$$

À l'aide de ce produit de dualité, la forme linéaire λ peut s'écrire formellement comme série de Laurent

$$\lambda = \sum_n a_n z^{-n-1}.$$

et on a $a_n = \mathrm{Res}_0(\lambda z^n)$.

Définition.— Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on appelle *distribution formelle sur le disque épointé, à valeurs dans* V, tout élément de $\mathrm{V}[\![z,z^{-1}]\!]$.

Exactement comme dans le cas classique, les distributions forment un espace vectoriel mais pas une algèbre ! Il n'est possible de multiplier deux distributions que si la série définissant chaque coefficient converge. À cela s'ajoute que cette algèbre partielle possède des diviseurs de zéro, dont le plus important eſt la diſtribution de Dirac.

Définition.— On appelle *diſtribution de Dirac* la double série formelle

$$\delta(z-w) = \frac{1}{z}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{w}{z}\right)^n.$$

On vérifie sans mal que le produit $(z-w)\delta(z-w)$ eſt bien défini dans $\mathbb{C}[\![z,z^{-1},w,w^{-1}]\!]$ et que $(z-w)\delta(z-w)=0$.

1.2 *Localité*

Afin de comprendre la notion subtile de localité, laissons-nous guider par un exemple. Soit la fraction rationnelle

$$\frac{1}{z-w} \in \mathbb{C}((z,w)).$$

Cette fraction n'engendre pas naturellement une diſtibution à deux variables, c.-à.-d un élément de $\mathbb{C}[\![z,z^{-1},w,w^{-1}]\!]$. Il exiſte en fait deux manières d'obtenir une telle diſtribution :

– plonger $\mathbb{C}((z,w))$ dans $\mathbb{C}((z))((w))$ en dévellopant en puissances de w/z

$$i_{|w|<|z|}\left(\frac{1}{z-w}\right) = \frac{1}{z}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{w}{z}\right)^n$$

– ou plonger $\mathbb{C}((z,w))$ dans $\mathbb{C}((w))((z))$ par

$$i_{|z|<|w|}\left(\frac{1}{z-w}\right) = -\frac{1}{w}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{z}{w}\right)^n$$

Or, bien que ces deux diſtributions proviennent du développement de la même fraction, elles ne sont pas égales. Leur différence eſt précisement égale à la fonction delta de Dirac !

$$i_{|w|<|z|}\left(\frac{1}{z-w}\right) - i_{|z|<|w|}\left(\frac{1}{z-w}\right) = \delta(z-w).$$

En fait, ces deux diſtributions ne sont égales qu'une fois multipliés par $(z-w)$. C'eſt ce qui motive la définition de localité.

Définition.— Deux diſtributions $A(z)$ et $B(w)$ dans $\mathbb{C}[\![z,z^{-1}]\!]$ et $\mathbb{C}[\![w,w^{-1}]\!]$ sont dites mutuellement *locales* si il exiſte un $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$(z-w)^N(A(z)B(w)-B(w)A(z)) = 0.$$

La localité peut donc être vu comme une sorte de commutation, en dehors de la diagonale.

1.3 *Zoologie des algèbres vertex*

La définition d'algèbre vertex peut être agrémentée d'autant de saveurs qu'il y a de symétries conformes. C'eſt pour cela que nous vous proposons de décrire la zoologie des définitions d'algèbres vertex. Nous débuterons par celle donnée par Kac dans [2].

Tout commence avec V, un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ représentant les états d'une théorie conforme des champs de dimension 2 [1]. Sur cet espace vectoriel agit l'opérateur énergie H. Il eſt diagonalisable et eſt à valeurs propres entières. L'espace V se décompose alors selon

$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n.$$

1. Pour plus de précision quant au lien entre algèbres vertex et TCC, on pourra se reporter au livre d'introdcution de Kac [2]

Un élément de $a \in V_p$ sera dit « de poids conforme » $\Delta_a = p$.

L'état physique où rien ne se passe a par hypothèse une énergie nulle et est noté
$$|0\rangle \in V_0,$$
c'est le *vecteur vide*. Il est non nul.

Une partie de l'invariance conforme de la théorie est encodée par l'action infinitesimale du groupe des translations $(\mathbb{C}, +)$, soit un opérateur linéaire
$$T : V \to V \text{ tel que } [H, T] = T \text{ et } T|0\rangle = 0.$$
En d'autres termes, T est un opérateur de degré 1 qui détruit de vide.

Enfin toute la théorie est encodée dans la « correspondance particule-champ », un opérateur
$$Y : V \to \mathrm{End}(V)[\![z, z^{-1}]\!],$$
qui à toute particule associe une distribution à valeurs opérateurs. Pour un élément $a \in V$, il est d'usage de noter $Y(a,z)$ sous la forme
$$Y(a,z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}.$$
On demande bien sûr à cet opérateur d'être covariant vis à vis de H. C'est à dire que
$$[H, Y(a,z)] = (z\partial_z + \Delta_a) Y(a,z)$$
ce que l'on peut reformuler en disant que l'opérateur a_n est de degré $\Delta_a - n - 1$. Et covariant vis à vis de T,
$$[T, Y(a,z)] = \partial_z Y(a,w).$$
On demande aussi que le champ engendré par le vide soit la distribution identité et que tout $Y(a,z)$ appliqué au vide redonne a au premier ordre, soit
$$Y(|0\rangle, z) = \mathrm{Id}_V \text{ et } \lim_{z \to 0} Y(a,z)|0\rangle = a.$$

Enfin, et surtout, la causalité implique que les champs $Y(a,z)$ sont mutuellement locaux.

Définition.— On appelle *algèbre vertex positivement graduée* tout quadruplet $(V, |0\rangle, T, Y)$ vérifiant les hypothèses ci-dessus.

Le fait que V soit positivement gradué a une conséquence importante, pour deux éléments a et b de V, la distribution $Y(a,z)b$ est en fait une *série de Laurent*
$$Y(a,z)b \in \mathbb{C}((z)).$$
Si l'on tient compte de ce fait, on peut alors oublier la graduation et parler d'algèbre vertex dans sa définition la plus nue.

Définition.— Une *algèbre vertex* est un quadruplet $(V, |0\rangle, T, Y)$ tel que
- V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$;
- $|0\rangle$ est un vecteur non nul de V ;
- T est un opérateur de V dans V annulant $|0\rangle$;
- Y est un opérateur de $V \otimes V \to V((z))$, tel que
  - $Y(|0\rangle, z) = \mathrm{Id}_V$;
  - $\lim_{z \to 0} Y(a,z)|0\rangle = a$;
  - $[T, Y(a,z)] = \partial_z Y(a,z)$;
  - les $Y(a,z)$ sont mutuellement locaux.

Nous allons ensuite faire la liste, suivant [3] de toutes les variantes obtenues à partir de cette définition.

Définition.— Une algèbre vertex est *graduée* si

– $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$;
– T est de degré 1 ;
– chaque a_n est de degré $\Delta_a - n - 1$.

Définition.— Une algèbre vertex graduée est dite *quasi-conforme* si V est muni d'opérateurs $L_{-1}, L_0, L_1, \ldots$ tels que
– $[L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j}$;
– $L_{-1} = T$;
– $L_0 = H$;
– l'action des L_i pour $i > 0$ est localement nilpotente ;
– le champ $L(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} L_n z^{-n-2}$ satisfait

$$[L(z), Y(a,w)] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} Y(L_{n-1}a, w)\partial_w^n \delta(z-w).$$

Remarque : l'algèbre de Lie engendrée par les L_i n'est autre que l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de $\mathbb{C}((z))$. En fait, l'algèbre de Lie du *foncteur en groupes* $A \mapsto \mathrm{Aut}(A((z)))$ est encore plus grosse. Elle est engendrée par les $(L_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ avec les relations $[L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j}$.

Et puisque les physiciens regardent *a priori* des représentations projectives, on peut tout aussi bien travailler avec une extension centrale de cette algèbre de Lie. L'algèbre de Lie $\mathcal{V}_c$ obtenue est *l'algèbre de Virasoro* ; elle est engendrée par les L_i et un élément central K. Les relations deviennent

$$[L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j} + \frac{c}{12}(i^3 - i)\delta_{i,-j}K.$$

Définition.— Une algèbre vertex graduée est *conforme de charge c*, si il existe un élément de degré 2, traditionnellement noté ω et appelé « tenseur impulsion-énergie » tel que
– $Y(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$;
– $L_{-1} = T$;
– $L_0 = H$;
– $[L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j} + \frac{c}{12}(i^3 - i)\delta_{i,-j}\mathrm{Id}_V$.

Remarque : on a en fait, $\omega = L_{-2}|0\rangle$.

Définition.— Une algèbre conforme est une *algèbre à opérateurs de vertex* si
– $V_n = 0$ pour $n < 0$;
– $\dim V_n < \infty$ pour $n \geq 0$.

Le carquois des différentes variétés d'algèbres vertex

$$\begin{tikzcd}
 & \text{algèbres vertex} & \\
 & \mathbb{Z}-\text{graduées} \arrow[u] & \\
\mathbb{N}-\text{graduées} \arrow[ur] & \text{quasi-conformes} \arrow[u] & \text{conformes} \arrow[ul] \\
 & \text{aov} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

2 EXEMPLES

2.1 *Algèbres vertex commutatives*

Afin de nous donner une intuition sur ce que devrait être l'opérade donnant les algèbres vertex, nous débuterons par un cas simple : celui des algèbres vertex commutatives.

Définition.— Une algèbre vertex est commutative si les champs $Y(a,z)$ commutent.

Cette condition ne semble pas si forte, mais elle trivialise complètement la stucture d'algèbre vertex. En effet, si $Y(a,z)$ et $Y(b,w)$ commutent, c'est que leur produit appartient à

$$V((z))((w)) \cap V((w))((z)) = V[\![z,w]\!][z^{-1},w^{-1}].$$

Si on ajoute à cela que $Y(a,z)Y(b,w)|0\rangle$ n'a pas de pôle en $w=0$ (et pas non plus en $z=0$ par commutativité), on obtient, en faisant tendre w vers 0 que

$$Y(a,z) \in V[\![z]\!].$$

Il s'en suit alors que pour tout a et b, l'opération $Y(a,0)b$ définit un produit associatif et commutatif et on a

$$Y(a,z)b = (e^{zT}a)b.$$

Conclusion : une algèbre vertex commutative n'est qu'une algèbre commutative munie d'une dérivation.

2.2 *Modules de niveau k sur une algèbre de Kac-Moody affine*

Nous allons décrire un foncteur qui, à toute algèbre de Lie simple de dimension finie $\mathfrak{g}$, associe un ensemble d' algèbres vertex $V_k(\mathfrak{g})$, « librement engendrées » à partir de $\mathfrak{g}$. Pour cela nous suivrons Frenkel [3] pas à pas.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ par exemple.

Définition.— À partir de $\mathfrak{g}$, on construit une nouvelle algèbre de Lie $L\mathfrak{g}$ appelée algèbre des lacets, de la manière suivante.

$$L\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((t)),$$

le crochet étant défini par

$$[at^n, bt^m] = [a,b]t^{n+m}.$$

Nous pouvons maintenant définir l'algèbre de Kac-Moody affine $\widehat{\mathfrak{g}}$ associée à $\mathfrak{g}$ comme extension centrale de $L\mathfrak{g}$ c.-à.-d

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}K \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow L\mathfrak{g} \longleftarrow 0$$

soit

$$\widehat{\mathfrak{g}} = L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}K$$

et le crochet est donné par

$$[at^n + \alpha K, bt^m + \beta K] = [a,b]t^{n+m} + n\delta_{n,-m}(a,b)K$$

où $(.,.)$ est une forme bilinéaire invariante de $\mathfrak{g}$ correctement normalisée.

Cette algèbre de Lie étant une extension centrale non triviale de $L\mathfrak{g}$, elle-même de dimension finie, ses représentations irréductibles sont *a priori* difficiles à comprendre. Cependant, la partie positive de $\widehat{\mathfrak{g}}$ formée des éléments de $\mathfrak{g}[\![t]\!] \oplus \mathbb{C}K$ est une extension triviale de $\mathfrak{g}[\![t]\!]$ et puisque l'élément K est central, cette sous-algèbre possède des représentations irréductibles de dimension 1, notées $\mathbb{C}_k$ où K agit par multiplication par k et où le reste de l'action est trivial.

Par induction on obtient alors les *modules de niveau k* :

$$V_k(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}[\![t]\!]\oplus\mathbb{C}K}^{\widehat{\mathfrak{g}}}\mathbb{C}_k$$

2.3 *Structure d'algèbre vertex sur* $V_k(\mathfrak{g})$

Suivant les notations de Frenkel, soit $\{J^a\}_{a=1,...,\dim(\mathfrak{g})}$ une base ordonnée de $\mathfrak{g}$. Les éléments $J^a_n = J^a t^n$ et K forment une base (topologique) de $\widehat{\mathfrak{g}}$.

- Vecteur vide : il sera noté v_k et est l'image de $1 \otimes 1 \in U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathbb{C}_k$ dans $V_k(\mathfrak{g})$;
- Graduation : d'après le théorème de Poincarré-Birkhoff-Witt, les éléments
$$J^{a_1}_{n_1} \dots J^{a_m}_{n_m} v_k,\ (n_1,a_1) \leq \dots \leq (n_m,a_m)$$
forment une base de $V_k(\mathfrak{g})$, on associe à cet élément le degré $-\sum_{i=1}^m n_i$;
- Translation : on pose $Tv_k = 0$ et $[T,J^a_n] = -nJ^a_{n-1}$;
- Opérateurs vertex : $Y(v_k,z) = \mathrm{Id}$ et
$$Y(J^a_{-1}v_k,z) = J^a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J^a_n z^{-n-1} \simeq J^a\delta(t-z).$$

Remarques.— Les champs $J^a(z)$ sont mutuellement locaux,
$$(z-w)^2[J^a(z),J^b(w)] = 0.$$
De plus, comme les J^a_n et T engendre les éléments de $V_k(\mathfrak{g})$, si l'on veut que les axiomes des algèbres vertex soient vérifiés, il n'existe qu'une seule manière d'étendre la définition de Y à tout élément de la base de $V_k(\mathfrak{g})$.

Enfin, on peut montrer qu'à peu près dans tous les cas, $V_k(\mathfrak{g})$ est munie d'une structure d'algèbre à opérateurs de vertex.

3 ALGÈBRES VERTEX ET ALGÈBRES À FACTORISATION

Commençons par donner la définition d'une algèbre à factorisation sur $\mathbb{C}$ au sens de Costello. Nous donnerons ensuite certains lien entre algèbres vertex et algèbres à factorisation, tels que décrit dans la thèse d'Owen Gwilliam.

3.1 *Algèbres à factorisation*

Definition.— On note $\mathrm{Ouv}(\mathbb{C})$ l'opérade colorée des ouverts de $\mathbb{C}$. Dans cette opérade,

- les couleurs sont les ouverts connexes de $\mathbb{C}$;
- $\mathrm{Hom}(\{U_i\},V)$ est un singleton lorsque les U_i sont disjoints et inclus dans V et vide dans les autres cas.

Une algèbre à préfactorisation est un foncteur $\mathcal{F} : \mathrm{Ouv}(\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\mathcal{C})$ où $(\mathcal{C},\otimes)$ est une catégorie abélienne monoïdale symétrique.

Remarque.— Dans la pratique, les seules catégories utilisées sont Nuc, la catégorie des espaces nucléaires et Nuc_{dg}, la catégorie des complexes d'espaces nucléaires.

La propriété de factorisation.— Une algèbre à factorisation est une algèbre sur l'opérade des ouverts vérifiant la propriété suivante dite de factorisation *stricte* : pour tout recouvrement factorisant d'un ouvert V par des ouverts connexes $\{U_i\}_{i\in I}$, on note PI l'ensemble des sous-ensembles finis α de I tels que pour tout $(p,q) \in \alpha^2$, $U_p \cap U_q = \emptyset$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{PI}$ on notera également
$$\mathcal{F}(\alpha) = \bigotimes_{i\in\alpha} \mathcal{F}(U_i)$$
et pour $\alpha_1,\dots,\alpha_n$,
$$\mathcal{F}(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \bigotimes_{i_1,\dots,i_n\in\alpha_1\times\dots\times\alpha_n} \mathcal{F}(U_{i_1}\cap\dots\cap U_{i_n})$$
on demande alors à avoir la suite exacte courte
$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\alpha_1,\alpha_2\in\mathrm{PI}^2} \mathcal{F}(\alpha_1,\alpha_2) \to \bigoplus_{\beta\in\mathrm{PI}} \mathcal{F}(\beta) \to \mathcal{F}(V) \longrightarrow 0.$$

Oui mais qu'est-ce qu'un recouvrement factorisant ? On dit qu'un recouvrement d'un ouvert V par des ouvert $\{U_i\}$ est *factorisant* lorsque pour tout ensemble de points $p_1, \dots, p_n$ de V, il existe des ouverts disjoints $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ appartenant au recouvrement et dont l'union recouvre les p_i.

Algèbres à factorisation homotopique.— Lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ est munie d'une structure de modèle — donc typiquement lorsqu'il s'agit d'une catégorie de complexes de chaines — on peut utiliser une propriété de factorisation plus naturelle dans ce contexte, qui fait intervenir le nerf de Cech du recouvrement (voir [1]).

3.2 *Les algèbres associatives en tant qu'algèbres à factorisation*

Nous allons donner l'exemple le plus simple et le plus immédiat d'algèbre à factorisation. Étant donné une algèbre associative A, il est possible de construire une algèbre à factorisation $\mathcal{F}_A$ de la manière suivante.

Pour tous ouverts connexes non vides $U \subset V$ de $\mathbb{C}$,

$$\mathcal{F}_A(U) = \mathcal{F}_A(V) = A \text{ et } \mathcal{F}_A(U) \to \mathcal{F}_A(V) \text{ est l'identité.}$$

On dit alors que $\mathcal{F}_A$ est *localement constante*.

À une famille d'ouverts disjoints $U_1, \dots, U_n$ inclus dans un ouvert V on associe la composée $n^{\text{ème}}$ de la multiplication.

Application.— Ce foncteur permet par exemple d'associer à toute algèbre vertex commutative dans laquelle $T = 0$ — ce qui est le cas par exemple lorsque l'on prend l'homologie d'une algèbre vertex topologique — une algèbre à factorisation.

3.3 *Algèbre à factorisation associée à une algèbre de Lie*

Dans sa thèse, Owen Gwilliam démontre un théorème crucial permettant de construire à l'envie toute une gamme d'algèbres à factorisation à partir d'un cofaisceau de Lie. D'après ses notations, nous noterons $\mathfrak{g}$ un *cofaisceau* de Lie, soit un copréfaisceau d'algèbres de Lie différentielles graduées, qui est un cofaisceau d'espaces vectoriels différentiels gradués.

Théorème.— Soit $\mathfrak{g}$ un cofaisceau de Lie, alors le foncteur

$$C^*\mathfrak{g} : U \mapsto (\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}(U)[1]), d_{CE})$$

est une algèbre à factorisation homotopique.

On utilisera aussi le théorème beaucoup plus simple :

Théorème.— Soit $\mathcal{F}$ une algèbre à factorisation homotopique, alors $H^*\mathcal{F}$ est encore une algèbre à factorisation homotopique.

Reprenons à présent notre algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$. On munit le cofaisceau $(\Omega_c^{0,*} \otimes \mathfrak{g}, \overline{\partial}) \oplus \mathbb{C}K$ d'une structure de cofaisceau de Lie en posant

$$[aX, bY] = [X,Y] a \wedge b - \frac{1}{2i\pi} \left(\int_U \partial a \wedge b \right) k(X,Y) K.$$

où a et b sont dans $\Omega_c^{0,*}(U)$, X et Y dans $\mathfrak{g}$. Ce cofaisceau sera noté $\mathfrak{g}_k$.

L'objet qui va nous intéresser pour le reste de cet exposé est :

$$\mathcal{V}_k(\mathfrak{g}) = H^* C_* \mathfrak{g}_k.$$

Par souci de simplicité, on travaillera dans la suite avec le niveau $k = 0$.

Suivant Gwilliam nous noterons $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ l'application $z \mapsto |z|$. Et nous allons comparer deux algèbres à préfactrorisation sur $\mathbb{R}^+$.

Rappelons que l'algèbre vertex $V_0(\mathfrak{g})$ est un module pour l'algèbre enveloppante $U(L\mathfrak{g})$. À l'aide de cette donnée, nous allons construire une algèbre à préfactorisation sur $\mathbb{R}^+$. Celle-ci doit être pensée comme la donnée géométrique d'une algèbre associative sur $\mathbb{R}^+_*$, couplée à un module placé en 0.

Soit $\mathcal{U}$ l'algèbre à préfactorisation sur $\mathbb{R}^+$ définie par $\mathcal{U}(X) = U(L\mathfrak{g})$ si $X \subset \mathbb{R}^+_*$ et $\mathcal{U}(X) = V_0(\mathfrak{g})$ dans le cas contraire. Les morphismes étant donnés par la multiplication de l'algèbre et la structure de module sur $V_0(\mathfrak{g})$.

Théorème.— Il existe une inclusion continue dense

$$i : \mathcal{U} \to \rho_* \mathcal{V}_0(\mathfrak{g}).$$

De plus, les application structurelles de $\mathcal{U}$ déterminent celles de $\rho_* \mathcal{V}_0(\mathfrak{g})$.

Corolaire.— Grâce à i, le module $V_0(\mathfrak{g})$ est muni d'une structure d'algèbre vertex, coïncidant avec celle décrite précédemment.

Pour avoir infiniment plus de détails, il faut aller voir dans [1].

Références

[1] Owen Gwilliam, *Factorization algebras and free field theories*, PhD thesis

[2] Victor Kac (1998), *Vertex Algebras for Beginners*, University Lecture Series 10 (2nd ed.), American Mathematical Society

[3] Edward Frenkel and David Ben-Zvi (2001), *Vertex Algebras and Algebraic Curves*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society

Table des matières