TOPOS EXPONENTIABLES

DAMIEN LEJAY

12 novembre 2015

Dans « topos exponentiables », il y a le mot « topos » et le mot « exponentiable ». Nous allons expliciter la signification de chacun de ces deux termes en commençant par le plus familier.

EXPONENTIABILITÉ

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec produit finis.

Définition.— *On dit qu'un objet X de $\mathcal{C}$ est exponentiable si pour tout Y dans $\mathcal{C}$,*

l'exponentielle Y^X existe.

C'est à dire qu'il existe un objet noté Y^X possédant la propriété universelle suivante : pour tout objet Z dans $\mathcal{C}$, on a

$$\mathrm{Hom}(Z, Y^X) = \mathrm{Hom}(X \times Z, Y)$$

Définition.— *Si tous les objets de $\mathcal{C}$ sont exponentiables, on dit que $\mathcal{C}$ est cartésienne fermée.*

DES EXEMPLES

— $\mathcal{E}ns$ la catégorie des (petits) ensembles est cartésienne fermée. Si X et Y sont deux ensembles, on a alors

$$Y^X \simeq \mathrm{Hom}(X, Y)\ ;$$

— $\mathcal{A}b$ la catégorie des groupes abéliens est aussi cartésienne fermée, si A et B sont deux groupes abéliens, leur exponentielle A^B est donnée par le groupe abélien des morphismes entre B et A ;

— Si X est un espace topologique, alors X est exponentiable si et seulement si il est localement quasi-compact. Dans ce cas, si Y est un espace topologique quelconque, l'exponentielle Y^X a pour ensemble sous-jacent

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$$

que l'on munit de la topologie quasi-compacte-ouverte.

Ces notes ont pour but d'exposer de manière élémentaire certains résultats obtenus avec Mathieu Anel.

Remarque.— Notons ici que la difficulté pour exponentier X est de trouver une topologie naturelle sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\mathrm{op}}(X, Y)$ tel que l'évaluation

$$X \times Y^X \to Y$$

soit continue.

☛ La réciproque est dure !

— Pour palier au problème de l'exemple précédent, on peut travailler dans la catégorie des espaces topologiques compactement engendrés. Il s'agit des espaces topologiques séparés X qui sont donnés par la colimite de leurs sous-espaces compacts

$$X \simeq \varinjlim_{K \subset X} K$$

Cette catégorie est cartésienne fermée et est utilisée pour faire de l'homotopie. Par exemple, les CW-complexes sont compactement engendrés mais pas nécessairement localement compacts.

la locale quasi-compacité

Afin de comprendre l'exponentiabilité des topos, nous allons nous concentrer sur les espaces topologiques qui sont exponentiables. On a déjà dit qu'ils coïncidaient avec les espaces localement quasi-compactes.

Soit X un espace topologique, on notera $\mathcal{O}(X)$ l'ensemble des ses ouverts. Cet ensemble n'est jamais considéré tel quel, car il possède plus de structure. Muni de l'inclusion $(\mathcal{O}(X), \subset)$ devient un ensemble ordonné que nous verrons comme une catégorie.

Remarque.— Si l'on ajoute les opérations d'union infinie $\cup$ et d'intersection finie $\cap$, nous voyons que notre catégorie $\mathcal{O}(X)$ a toutes les colimites et les limites finies. On peut aussi ajouter que les limites finies distribuent sur les colimites. Tout se passe *comme si* $\mathcal{O}(X)$ *était un anneau*.

Notons $\mathcal{Q}(X)$ l'ensemble ordonné des voisinages quasi-compactes de X. Nous allons chercher à comparer $\mathcal{O}(X)$ et $\mathcal{Q}(X)$. Il n'est pas du tout clair *a priori* que l'on puisse naturellement construire un quasi-compact à partir d'un ouvert. Par contre, on peut toujours construire un ouvert à partir d'un quasi-compact, en en prenant l'intérieur :

$$\mathrm{Int} : \mathcal{Q}(X) \to \mathcal{O}(X)$$

Cette construction est bien sûr fonctorielle, cependant le foncteur Int n'a ni adjoint à droite, ni adjoint à gauche. Mais il possède un Ind-adjoint à gauche. Notons $\varepsilon : \mathrm{Ind}(\mathcal{Q}(X)) \to \mathcal{O}(X)$ la Ind-extension de Int, son adjoint à gauche $\beta : \mathcal{O}(X) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{Q}(X))$ est donné par

$$\beta(U) = \varinjlim_{Q \subset U} Q$$

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition.— *Le foncteur* $\beta : \mathcal{O}(X) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{Q}(X))$ *est pleinement fidèle si et seulement si* X *est localement quasi-compact.*

Corolaire.— *La catégorie* $\mathcal{O}(X)$ *est une localisation coréflexive d'une catégorie de ind-objets dès que* X *est localement quasi-compact.*

Définition.— *Une catégorie* $\mathcal{C}$ *est dite continue si c'est une localisation coréflexive d'une catégorie de ind-objets, où le foncteur de localisation commute aux colimites filtrantes.*

On peut en fait faire encore mieux. On peut se débarrasser des quasi-compacts pour n'écrire la condition de locale quasi-compacité qu'en termes d'ouverts ! Pour cela il faut définir une nouvelle relation entre les ouverts qui va remplacer les quasi-compacts.

Définition.— *On écrira* $U \ll V$ *si il existe un quasi-compact* $U \subset Q \subset V$.

Si l'on note $\varepsilon : \mathrm{Ind}(\mathcal{O}(X)) \to \mathcal{O}(X)$ le foncteur d'évaluation, on a alors le théorème

Théorème.— *Le foncteur* ε *possède un adjoint à gauche si et seulement si* X *est localement quasi-compact. L'adjoint* $\beta : \mathcal{O}(X) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{O}(X))$ *est alors donné par*

$$\beta(U) = \varinjlim_{V \ll U} V$$

et l'on a le diagramme

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{O}(X)) \underset{\underset{\alpha}{\longleftarrow}}{\overset{\overset{\beta}{\longleftarrow}}{\xrightarrow{\ \varepsilon\ }}} \mathcal{O}(X)$$

où α *est l'inclusion canonique.*

Corolaire.— *On obtient dans ce cas un monade continue* $M = \alpha\varepsilon$ *et une comonade cocontinue* $W = \beta\varepsilon$ *et une identification tout à fait non triviale entre leurs points fixes*

$$\mathcal{O}(X) \simeq \mathrm{Fix}(M) \simeq \mathrm{Fix}(W)$$

☛ C'est dans cette équivalence entre deux localisations différentes que se trouve le cœur de la preuve de l'exponentiabilité.

le cas des topos

Nous allons commencer par rappeler ce qu'est un topos. Tout comme les schémas affines, les topos sont définis comme la catégorie opposée d'une catégorie d'objets *ressemblant à des anneaux*, ici les *catégories de faisceaux*.

Définition.— *On dira que* $\mathcal{C}$ *est une catégorie de faisceaux si elle est satisfait les axiomes de Giraud. Cela inclut*

- *le fait que* $\mathcal{C}$ *a toutes les colimites ;*
- *le fait que* $\mathcal{C}$ *a les limites finies ;*
- *le fait que les limites finies se distribuent sur les colimites*

La dernière propriété est appelée l'universalité des colimites.

Un morphisme entre catégories de faisceaux $f^* : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *est un foncteur cocontinu et exact à gauche.*

Remarque.— Si X eſt un espace topologique la catégorie $\mathcal{S}h(X)$ des faisceaux d'ensembles sur X satisfait les axiomes de Giraud et on a un fonćteur

$$\mathcal{T}op \to \mathcal{S}hv^{op}$$

Définition.— *La catégorie des topos eſt l'opposée de celle des faisceaux*

$$\mathcal{T}ps = \mathcal{S}hv^{op}$$

L'isomorphisme eſt noté $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{S}h(\mathcal{X})$ et un morphisme $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ donne $f^* : \mathcal{S}h(\mathcal{Y}) \to \mathcal{S}h(\mathcal{X})$.

On peut maintenant énoncer le théorème d'exponentiabilité.

Théorème (Johnſtone-Joyal)**.—** *Soit $\mathcal{X}$ un topos, alors $\mathcal{X}$ eſt exponentiable si et seulement si $\mathcal{S}h(\mathcal{X})$ eſt continue ou de manière équivalente si exiſte un fonćteur β complétant le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ind}(\mathcal{S}h(\mathcal{X})) \arrow[r, "\varepsilon" description] & \mathcal{S}h(\mathcal{X}) \arrow[l, bend right, "\beta"'] \arrow[l, bend left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

des exemples

— Si X eſt un espace topologique localement compaćt, alors son topos associé $\mathcal{X}$ tel que

$$\mathcal{S}h(\mathcal{X}) = \mathcal{S}h(X)$$

eſt exponentiable ;

— Il exiſte des espaces localement quasi-compaćts dont le topos associé n'eſt pas exponentiable ;

— Si G eſt un groupe, alors le topos $\mathcal{B}G$ eſt exponentiable. Notons également G la catégorie avec un unique objet et G pour ensemble de morphismes. Alors $\mathcal{B}G$ eſt le topos dont la catégorie des faisceaux eſt la catégorie de préfaisceaux $\mathcal{P}(G)$.

le cas des topos supérieures

Si l'on remplace les catégories par des catégories supérieures, on obtient la notion de n-topos pour $0 \leq n \leq \infty$. Avec Mathieu Anel, nous avons étendu le théorème d'exponentiabilité à tout n et nous nous intéressons maintenant aux conséquences de l'exponentiabilité dans le cas des ∞-topos.

application : dualité de verdier à la lurie

La dualité de Verdier à la Lurie eſt un résultat d'auto-dualité de la catégorie des faisceaux ſtables sur un espace localement compaćt. Étendre cette dualité eſt notre motivation initiale.

Soit X un espace topologique, notons $\mathcal{S}h(X, Sp)$ la ∞-catégorie des faisceaux ſtables sur X. Sa catégorie duale eſt la catégorie des cofaisceaux ſtables

$$\mathcal{S}h(X, Sp)^\vee \simeq \mathcal{C}osh(X, Sp)$$

Lurie montre que si X est localement compact alors $\mathcal{S}h(X, Sp)$ est canoniquement équivalente à son dual. Ce que nous avons montré avec M. Anel c'est que si un ∞-topos $\mathcal{X}$ est exponentiable alors $\mathcal{S}h(\mathcal{X}, Sp)$ est dualisable, c'est à dire que $\mathcal{S}h(\mathcal{X}, Sp)$ et $\mathcal{C}osh(X, Sp)$ forment une paire en dualité. Il s'agit donc d'un premier pas nécessaire vers l'autodualité.