UNE NOTE SUR LES GROUPOÏDES

DAMIEN LEJAY

QU'EST-CE QU'UN GROUPOÏDE ?

La notion de groupoïde fut décrite pour la première fois par Heinrich Brandt dans [Bra27]. Commençons tout de suite à donner une définition concise.

☛ **Définition.—** Un groupoïde est une catégorie où toute flèche possède un inverse.

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde. Nous allons chercher à présenter la définition des groupoïdes sous une forme plus explicite, *simpliciale*. Pour cela notons $\mathcal{G}_0$ son ensemble d'objets et $\mathcal{G}_1$ son ensemble de flèches. À toute flèche $f \in \mathcal{G}_1$, nous noterons $s(f)$ son domaine, c'est à dire son objet de départ ; $s : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0$ est la fonction *source*. De la même manière, nous noterons $b : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0$ la fonction *but* qui à toute flèche associe son codomaine. Enfin $i : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_1$ associe à tout objet $x \in \mathcal{G}_0$ la flèche identité $\mathrm{Id}_x \in \mathcal{G}_1$.

Nous obtenons donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_1 \arrow[r, shift left=2, "b"] \arrow[r, shift right=2, "s"'] & \mathcal{G}_0 \arrow[l, "i" description] \end{tikzcd}$$

Ces trois fonctions vérifient certaines propriétés ; nous avons tout d'abord les *identités simpliciales* :

- $b \circ i = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_0}$;
- $s \circ i = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_0}$.

Puis l'axiome de *composition* : pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{G}_1$ avec $s(g) = b(f)$, il existe une nouvelle flèche notée $g \circ f$ avec $s(g \circ f) = s(f)$ et $b(g \circ f) = b(g)$.

Remarque.— Nous obtenons ainsi une « multiplication » partiellement définie, plus précisément une fonction $m : \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_1$ où $\mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1$ est le produit fibré

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{G}_1 \arrow[d, "s"] \\ \mathcal{G}_1 \arrow[r, "b"] & \mathcal{G}_0 \end{tikzcd}$$

C'est ce qui explique le choix du terme *groupoïde*.

Note écrite à l'occasion d'un groupe de travail sur les champs, organisé fin 2015 par Mathieu Anel à Paris 7.

L'axiome *d'associativité* : pour tout triplet de flèches composables $(f,g,h) \in \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1$,

$$m(f, m(g,h)) = m(m(f,g),h)$$

L'axiome *d'identité* : pour toute flèche $f \in \mathcal{G}_1$,

$$m(f,(i \circ b)(f)) = f \text{ et } m((i \circ s)(f), f) = f$$

Enfin, l'axiome *d'inversion* : pour toute flèche $f \in \mathrm{E}_1$, il existe $f^{-1} \in \mathrm{E}_1$ tel que $s(f^{-1}) = b(f)$ et $b(f^{-1}) = s(f)$ et qui de plus satisfait les équations

$$m(f^{-1}, f) = (i \circ s)(f) \text{ et } m(f, f^{-1}) = (i \circ b)(f).$$

DES EXEMPLES

— Soit E un ensemble, on peut alors définir un groupoïde $j(\mathrm{E})$ grâce au diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, shift left=2, "b"] \arrow[r, shift right=2, "s"'] & \mathrm{E} \arrow[l, "i" description] \end{tikzcd}$$

avec $b = i = s = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. La composition est donnée par $m : (x,x) \mapsto x$ qui correspond à la composée de Id_x avec elle-même. Ainsi tout ensemble peut être vu comme un groupoïde.

— Soit G un groupe, on peut alors définir un groupoïde $j'(\mathrm{G})$ grâce au diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, shift left=2, "b"] \arrow[r, shift right=2, "s"'] & * \arrow[l, "i" description] \end{tikzcd}$$

où s et b sont des fonctions constantes et où $i : * \to \mathrm{G}$ pointe vers l'identité du groupe G. Enfin la composition est donnée par la multiplication du groupe $m : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$. Ainsi tout groupe peut être vu comme un groupoïde.

— Soit G un groupe, agissant (à gauche) sur un ensemble E. On peut alors définir $\mathrm{G} \ltimes \mathrm{E}$ le *groupoïde d'action de* G *sur* E par le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times \mathrm{E} \arrow[r, shift left=2, "b"] \arrow[r, shift right=2, "s"'] & \mathrm{E} \arrow[l, "i" description] \end{tikzcd}$$

Ici $b(g,e) = g.e$ tandis que $s : \mathrm{G} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est la seconde projection et $i(x) = (e,x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ avec $e \in \mathrm{G}$ le neutre de G.
Si (g,x) et (h,y) sont des éléments de $\mathrm{G} \times \mathrm{E}$ avec $y = g.x$, alors la composition est donnée par $(h,y) \circ (g,x) = (hg,x)$.

Remarque.— On pense, par exemple, au cas où E est un espace de configurations possédant G pour groupe de symétrie.

Remarque.— Cette construction de groupoïdes englobe les précédentes : nous avons $j(\mathrm{E}) = * \ltimes \mathrm{E}$ et $j'(\mathrm{G}) = \mathrm{G} \ltimes *$.

— Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $j : \mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{E} \times \mathrm{E}$. On peut alors construire un groupoïde :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r, shift left=2, "b"] \arrow[r, shift right=2, "s"'] & \mathrm{E} \arrow[l, "i" description] \end{tikzcd}$$

où i provient de l'application diagonale $\Delta : \mathrm{E} \to \mathrm{E} \times \mathrm{E}$, c'est à dire $\Delta(x) = (x, x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Par définition d'une relation d'équivalence, Δ se factorise par l'inclusion $j : \mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{E} \times \mathrm{E}$. Les fonctions source et but sont données par composition des deux projections $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ avec j.
La composition est donnée par la transitivité de la relation d'équivalence : si l'on a $x\mathrm{R}y$ et $y\mathrm{R}z$ alors on a $x\mathrm{R}z$.

Remarque.— Un groupoïde $\mathcal{G}$ est de ce type si et seulement si $j : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0$ donnée par les fonctions source et but, est injective.

— Soit $\mathrm{T} = (\mathrm{E}, \mathcal{T})$ un espace topologique. Nous allons lui associer son *groupoïde des chemins*. Notons $\mathrm{Chm}(\mathrm{T})$ l'ensemble des *chemins* dans T, c'est à dire l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $[0,1]$ dans T, *à reparamétrisation près*. Le groupoïde fondamental est défini par le diagramme suivant :

$$\mathrm{Chm}(\mathrm{T}) \;\overset{b}{\underset{s}{\overrightarrow{\underleftarrow{\;i\;}}}}\; \mathrm{E}$$

où pour un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathrm{T}$, $s(\gamma) = \gamma(0)$ et $b(\gamma) = \gamma(1)$. Pour tout élément $x \in \mathrm{E}$, $i(x)$ est le chemin constant de T en x. Enfin, la composition de deux chemins composables $\gamma_1 \circ \gamma_2$ est donnée par concaténation $\gamma_2.\gamma_1 : [0,2] \to \mathrm{T}$ puis par reparamétrisation.

Remarque.— Si la topologie de T est discrète, alors tous les chemins de T sont constants. On retombe alors sur le tout premier exemple !

— Reprenons l'exemple ci-dessus. Deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathrm{T}$ sont dits *homotopes* si il existe une fonction continue $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathrm{T}$ tel que $h(0,-) = \gamma_1$ et $h(1,-) = \gamma_2$. L'homotopie entre chemins *ayant mêmes extrémités* est une relation d'équivalence que nous noterons $\sim$. À un espace topologique T, on associe $\Pi_1(\mathrm{T})$ son *groupoïde fondamental* [Bro67] défini par

$$\mathrm{Chm}(\mathrm{T})/\sim \;\overset{b}{\underset{s}{\overrightarrow{\underleftarrow{\;i\;}}}}\; \mathrm{E}$$

ENCORE DES EXEMPLES !

Pour trouver plein d'exemples, on peut regarder dans [RR01].

— Soit $\mathrm{V} = (\mathrm{E}, \mathcal{T}, \mathcal{A}, g)$ une variété Riemannienne, notons $\mathrm{Géo}(\mathrm{V})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans V qui sont des géodésiques par morceaux. Alors

$$\mathrm{Géo}(\mathrm{V}) \;\overset{b}{\underset{s}{\overrightarrow{\underleftarrow{\;i\;}}}}\; \mathrm{E}$$

est un groupoïde, c'est même un sous-groupoïde du groupoïde des chemins. Plus généralement, on peut construire tout un tas de sous-groupoïdes du groupoïde des chemins en imposant des conditions par morceaux.

— Soit $V = (E, \mathcal{T}, \mathcal{A}, \nabla)$ une variété munie d'une connexion et notons $\mathrm{Isom}^{\nabla}(V)$ l'ensemble des isomorphismes $\alpha : T_x V \to T_y V$ provenant d'un transport parallèle sur V entre les points x et y. Le diagramme

$$\mathrm{Isom}^{\nabla}(V) \underset{s}{\overset{b}{\underset{\xleftarrow{\ i\ }}{\rightrightarrows}}} E$$

où $s(\alpha) = x$ et $b(\alpha) = y$ pour $\alpha : T_x V \to T_y V$ et $i(x) = \mathrm{Id}_{T_x V}$ pour x un point de V, est un groupoïde [Ath06].

Remarque.— Notons que ce groupoïde n'est pas un sous-groupoïde du groupoïde des chemins car deux chemins peuvent donner lieu au même isomorphisme entre espaces tangents. Il peut être obtenu comme quotient du groupoïde des chemins lisses par morceaux dans V.

— Le groupoïde de Hæfliger est le groupoïde Γ^n tel que $\Gamma^n_0 = \mathbb{R}^n$ et Γ^n_1 est l'ensemble des germes φ_x de difféomorphismes $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, pour $x \in \mathbb{R}^n$. L'application but est donnée par $b(\varphi_x) = y = \varphi_x(x)$. Si φ_x et $\psi_{\varphi(x)}$ sont deux germes de difféomorphismes, la composée des deux est le germe $(\psi \circ \varphi)_x$ [MM03].

— Le groupoïde $\mathcal{G}$ des projecteurs orthogonaux d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est défini par : $\mathcal{G}_0$ est l'ensemble des projecteurs orthogonaux de l'espace $\mathcal{H}$ tandis que $\mathcal{G}_1$ est l'ensemble des isométries partielles, c'est à dire que

$$\mathcal{G}_1 = \{w \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \,|\, ww^*w = w\}$$

Les applications source et but sont données par $s(w) = w^*w$ et $b(w) = ww^*$. La composition est la composition classique des opérateurs [CCGF+99].

Remarque.— Pour une isométrie partielle w, $s(w)$ est le projecteur orthogonal sur l'image de w^* et $b(w)$ correspond au projecteur orthogonal sur l'image de w.

— Le groupoïde tangent à une variété, défini par Connes pour les théorèmes d'indice [CCGF+99]. On peut ajouter ses variations comme le groupoïde adiabatique [DS14].

— On trouve aussi des groupoïdes dans les C^*-algèbres et les théories de quantification [Bos07]. Il y en a aussi en géométrie symplectique [Wei91].

Bref, il y a des groupoïdes partout. Certains avec des structures supplémentaires, comme les groupoïdes lisses. Cependant, comme l'objectif ici est de préparer la définition de *champ*, nous allons nous concentrer sur des groupoïdes ensemblistes, sans structures supplémentaires.

GROUPOÏDES &. ENSEMBLES, CATÉGORIES ET GROUPES

On a vu dans les exemples qu'il était toujours possible de construire un groupoïde à partir de n'importe quel groupe, mais aussi de n'importe quel ensemble. Qui plus est, un groupoïde est en particulier une catégorie... Mais alors, un groupoïde en général, cela ressemble-t-il plus à un groupe, à un ensemble ou bien à une catégorie ?

Pour répondre à cette question, nous allons regarder la *catégorie des groupoïdes*. Plus précisément, il nous faut définir ce qu'est un morphisme de groupoïdes. On pourra ensuite comparer la catégorie des groupoïdes à celle des groupes et des ensembles. On s'intéressera aussi surtout aux *équivalences* entre groupoïdes.

Remarque.— Soit (G, m) un groupe. La multiplication $m : G \times G \to G$ est une *structure* sur l'ensemble G ; c'est à dire que si l'on oublie m, on ne peut pas la retrouver à partir de l'ensemble G. *A contrario*, le fait que le monoïde (G, m) soit un groupe est une *propriété* ; c'est à dire qu'il est possible de déterminer uniquement à partir du monoïde sous-jacent, qui est un groupe et qui ne l'est pas.

Il en est de même pour les groupoïdes. Les fonctions source et but forment une *structure*, l'existence de la fonction identité est une *propriété*. De ce fait, nous oublierons souvent d'écrire i dans les diagrammes. Ainsi un groupoïde quelconque $\mathcal{G}$ sera représenté par un diagramme du type

$$\mathcal{G}_1 \underset{b}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathcal{G}_0$$

Ce faisant, on oublie de préciser quelle est la multiplication

☛ **Définition.—** Soit $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux groupoïdes. Un morphisme de groupoïdes $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ est un foncteur entre les deux catégories sous-jacentes.

Un morphisme de groupoïdes est donc la donnée d'une paire de fonctions $f_0 : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{H}_0$ et $f_1 : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{H}_1$ tel que le diagramme suivant commute,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "b"] & \mathcal{H}_1 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "b"] \\ \mathcal{G}_0 \arrow[r, "f_0"] & \mathcal{H}_0 \end{tikzcd}$$

c'est à dire que $f_0 s = s f_1$ et $f_0 b = b f_1$.

On demande de plus, la commutation de f_1 avec la composition

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \arrow[r, "f_1 \times f_1"] \arrow[d, "m"] & \mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{H}_0} \mathcal{H}_1 \arrow[d, "m"] \\ \mathcal{G}_1 \arrow[r, "f_1"] & \mathcal{H}_1 \end{tikzcd}$$

☛ **Définition.—** La catégorie des groupoïdes est notée $\mathcal{G}$pd. Ses objets sont les groupoïdes et ses flèches les morphismes entre groupoïdes.

Comparons maintenant la catégorie $\mathcal{G}$pd des groupoïdes à $\mathcal{E}$ns la catégorie des ensemble, à $\mathcal{C}$at la catégorie des catégories et à $\mathcal{G}$rp la catégorie des groupes.

Proposition.— *Le foncteur $j : \mathcal{E}\mathrm{ns} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}$ qui à tout ensemble* E *associe le groupoïde*

$$E \rightrightarrows E$$

défini dans les exemples, est pleinement fidèle

Démonstration.— Soit E un ensemble. Comme les applications source et but de $j(\mathrm{E})$ sont égales à l'identité de E, pour tout autre ensemble X, un morphisme de groupoïdes $\mathrm{F} : j(\mathrm{E}) \to j(\mathrm{X})$ est entièrement déterminé par $f_0 : \mathrm{E} \to \mathrm{X}$. En effet, nécessairement $f_1 = f_0$.

Inversement, toute fonction $f_0 : \mathrm{E} \to \mathrm{X}$ engendre un morphisme

$$\mathrm{F} : j(\mathrm{E}) \to j(\mathrm{X})$$

en posant $f_1 = f_0$.

Ainsi le foncteur j est bien pleinement fidèle. □

Théorème.— *Le foncteur* $j : \mathcal{E}\mathrm{ns} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}$ *possède un adjoint a gauche.*

Démonstration.— Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde. Notons $\pi_0(\mathcal{G})$ le coégalisateur

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "b"'] & \mathcal{G}_0 \arrow[r] & \pi_0(\mathcal{G}) \end{tikzcd}$$

Nous prétendons que $\pi_0 : \mathcal{G}\mathrm{pd} \to \mathcal{E}\mathrm{ns}$ est un foncteur. Pour le voir, commençons par un petit rappel : soit $\mathcal{C}$ une catégorie, on note $\mathcal{D}\mathrm{iag}(\mathcal{C})$ la catégorie des diagrammes dans $\mathcal{C}$ dont les objets sont les foncteurs $f_\mathrm{I} : \mathrm{I} \to \mathcal{C}$ depuis une catégorie I et dont les flèches sont les foncteurs $\varphi : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ tel que $f_\mathrm{J} \circ \varphi = f_\mathrm{I}$. Si $\mathcal{C}$ possède toutes les colimites, alors « prendre la colimite d'un diagramme dans $\mathcal{C}$ » est fonctorielle, c'est à dire qu'il existe un « foncteur colim » :

$$\varinjlim : \mathcal{D}\mathrm{iag}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}.$$

Or, on remarque que tout morphisme de groupoïde $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ induit un morphisme entre les diagrammes utilisés afin de calculer le π_0. Ainsi π_0 est bien un foncteur.

Montrons que c'est l'adjoint à gauche que nous cherchions. Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde et E un ensemble. La donnée d'un morphisme de groupoïdes $\mathrm{F} : \mathcal{G} \to j(\mathrm{E})$ est équivalente à la donnée de deux fonctions $f_0 : \mathcal{G}_0 \to \mathrm{E}$ et $f_1 : \mathcal{G}_1 \to \mathrm{E}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "b"] & \mathrm{E} \arrow[d, shift right, "\mathrm{Id}_\mathrm{E}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{Id}_\mathrm{E}"] \\ \mathcal{G}_0 \arrow[r, "f_0"] & \mathrm{E} \end{tikzcd}$$

cela signifie donc que $f_0 \circ s = f_0 \circ b = f_1$. Ceci équivaut au fait que $f_0 : \mathcal{G}_0 \to \mathrm{E}$ se factorise par le coégalisateur $\widetilde{f_0} : \pi_0(\mathcal{G}) \to \mathrm{E}$. On a ainsi l'injection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{pd}}(\mathcal{G}, j(\mathrm{E})) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\mathrm{ns}}(\pi_0(\mathcal{G}), \mathrm{E}).$$

Maintenant étant donnée $\widetilde{f_0} : \pi_0(\mathcal{G}) \to \mathrm{E}$, on en déduit par composition $f_0 : \mathcal{G}_0 \to \mathrm{E}$ et $f_1 = f_0 \circ s = f_0 \circ b$ tel que le carré habituel commute. Il reste à prouver que f_1 préserve la composition. Or, tous les morphismes de $j(\mathrm{E})$ sont des identités. Ainsi si a et b sont deux éléments de $\mathcal{G}_1$ tel que $s(b) = b(a)$, alors nécessairement $f_1(a) = f_1(b) = \mathrm{Id}_{f_0(s(b))}$. Et donc $f_1(b \circ a) = \mathrm{Id}_{f_0(s(b))} = f_1(b) \circ f_1(a)$.

On a donc démontré l'adjonction

$$\pi_0 \dashv j$$

□

Remarque.— Soit T un espace topologique localement connexe par arcs. Considérons $\Pi_1(\mathrm{T})$ son groupoïde fondamental. Alors $\pi_0(\Pi_1(\mathrm{T})) = \pi_0(\mathrm{T})$, d'où la notation.

Proposition.— *Le foncteur* $j : \mathcal{E}\mathrm{ns} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}$ *admet aussi un adjoint à droite.*

Démonstration.— Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde. Notons $\tau_0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$ la 0-troncation du groupoïde $\mathcal{G}$. Alors la construction $\mathcal{G} \mapsto \tau_0(\mathcal{G})$ induit un foncteur $\tau_0 : \mathcal{G}\mathrm{pd} \to \mathcal{E}\mathrm{ns}$. En effet, tout morphisme de groupoïdes $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ inclus en particulier une fonction $\mathcal{G}_0 \to \mathcal{H}_0$.

Montrons que τ_0 est l'adjoint à droite recherché. Soit E un ensemble, $\mathcal{G}$ un groupoïde et $f_0 : \mathrm{E} \to \mathcal{G}_0$ une fonction. On définit $f_1 : \mathrm{E} \to \mathcal{G}_1$ par $f_1(x) = \mathrm{Id}_{f_0(x)}$. Et puisque dans $j(\mathrm{E})$ les seules compositions sont celles des identités, on obtient bien un morphisme de groupoïdes.

Inversement, si $\mathrm{F} : j(\mathrm{E}) \to \mathcal{G}$ est un morphisme de groupoïde, alors F est entièrement déterminé par $\mathrm{F}_0 : \mathrm{E} \to \mathcal{G}$ et F_1 envoie chaque x sur $\mathrm{Id}_{\mathrm{F}_0(x)}$.

On a donc montré l'adjonction

$$j \dashv \tau_0$$

□

Corolaire.— *La catégorie des ensembles est à la fois une sous-catégorie réflexive et coréflexive de la catégorie des groupoïdes.*

Passons à la comparaison avec la catégorie $\mathcal{C}\mathrm{at}$ des catégories.

Théorème.— *Le foncteur oubli* $\mathrm{Oub} : \mathcal{G}\mathrm{pd} \to \mathcal{C}\mathrm{at}$ *est pleinement fidèle et possède à la fois un adjoint à droite et un adjoint à gauche.*

Démonstration.— La pleine fidélité est évidente puisque nous avons défini la catégorie des groupoïdes comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des catégories. Construisons les deux adjoints.

Tout d'abord l'adjoint à droite se construit de la manière suivante : soit $\mathcal{C}$ une catégorie, si l'on supprime toutes les flèches de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas inversibles, on obtient le *groupoïde interne* de $\mathcal{C}$, noté $\mathrm{Int}(\mathcal{C})$. C'est la plus grosse sous-catégorie de $\mathcal{C}$ qui soit un groupoïde, ce qui nous donne tout de suite l'adjonction

$$\mathrm{Oub} \dashv \mathrm{Int}.$$

À l'inverse, si l'on veut construire l'adjoint à gauche, il faut trouver le plus petit groupoïde $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ contenant $\mathcal{C}$. Pour cela, pour toute flèche $f : a \to b$ qui ne possède pas d'inverse, on ajoute une nouvelle flèche $f^{-1} : b \to a$. Puis on ajoute formellement toutes les compositions possibles. Ainsi les objets de $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ sont ceux de $\mathcal{C}$ et les flèches de $\mathcal{G}(\mathrm{C})$ sont les mots finis de la forme $f_1 f_2^{-1} f_3 f_4^{-1} ... f_{n-1}^{-1} f_n$ où les f_i^{-1} sont les inverses formels des f_i. Cela donne l'adjonction

$$\mathcal{G} \dashv \mathrm{Oub}$$

□

Corolaire.— *Le foncteur oubli* $\mathrm{Oub} : \mathcal{G}\mathrm{pd} \to \mathcal{C}\mathrm{at}$ *fait de la catégorie des groupoïdes à la fois une sous-catégorie réflexive et coréflexive de la catégorie des catégories.*

Enfin, comparons $\mathcal{G}\mathrm{pd}$ et $\mathcal{G}\mathrm{rp}$.

Théorème.— *La construction donnée en exemple, qui à tout groupe* G *associe le groupoïde*

$$j'(\mathrm{G}) = \left(\mathrm{G} \rightrightarrows *\right)$$

induit un foncteur pleinement fidèle $j' : \mathcal{G}\mathrm{rp} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{pd}$. *Ce foncteur possède un adjoint à gauche mais n'a pas d'adjoint à droite.*

Démonstration.— Puisque tout morphisme de groupes $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ préserve la multiplication et que $\mathrm{G} \times_* \mathrm{G} = \mathrm{G} \times \mathrm{G}$, le morphisme de groupes φ engendre un foncteur $\mathrm{F} : j'(\mathrm{G}) \to j'(\mathrm{H})$ où F_0 est constant et F_1 est donné par φ. La construction j' est donc bien fonctorielle.

Inversement, tout foncteur $\mathrm{F} : j'(\mathrm{G}) \to j'(\mathrm{H})$ est entièrement déterminé par $\mathrm{F}_1 : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ et l'axiome de composition implique que F_1 est un morphisme de groupes. Ainsi j' est pleinement fidèle.

Supposons que nous voulions construire un adjoint à droite à j'. Soit G un groupe, $\mathcal{G}$ un groupoïde et $\mathrm{F} : j'(\mathrm{G}) \to \mathcal{G}$ un morphisme. Un tel morphisme est équivalent à la donnée d'un point $x \in \mathcal{G}_0$ et d'un morphisme de groupes $\mathrm{G} \to \mathrm{Hol}_x(\mathcal{G})$ où $\mathrm{Hol}_x(\mathcal{G})$ est le *groupe d'holonomie* de $\mathcal{G}$ au point x, c'est l'ensemble des flèches de $\mathcal{G}$ qui ont source et but égaux à x. Malheureusement le candidat $\coprod_{x \in \mathcal{G}_0} \mathrm{Hol}_x(\mathcal{G})$ n'est pas un groupe, il lui manque un élément neutre !

Construisons l'adjoint à gauche. Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde et G un groupe. On se rend compte que tout morphisme de groupoïde $\mathcal{G} \to j'(\mathrm{G})$ se résume à la donnée d'une fonction $f_1 : \mathcal{G}_1 \to \mathrm{G}$ compatible avec la composition. Un tel morphisme est équivalent à un morphisme de groupes $\widetilde{f_1} : \mathcal{U}(\mathcal{G}) \to \mathrm{G}$ où $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ est le *groupe universel* du groupoïde $\mathcal{G}$. Il est construit de la manière suivante : $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ est un quotient du groupe libre sur l'ensemble $\mathcal{G}_1$ par les relations $gfh^{-1} = 1$ dès que $m(g, f) = h$ dans $\mathcal{G}_1$.

Inversement, tout morphisme de groupe $\widetilde{f_1} : \mathcal{U}(\mathcal{G}) \to \mathrm{G}$ induit un morphisme $f_1 : \mathcal{G}_1 \to \mathrm{G}$ compatible avec la composition et donc un morphisme de groupoïdes $\mathcal{G} \to j'(\mathrm{G})$.

On a donc l'adjonction

$$\mathcal{U} \dashv j'$$

$\square$

☛ **Résumé.—**

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}\mathrm{ns} \arrow[r, "j" description] & \mathcal{G}\mathrm{pd} \arrow[l, shift right=2, "\pi_0"'] \arrow[l, shift left=2, "\tau_0"] \arrow[r, "\mathrm{Oub}" description] \arrow[d, shift right, "\mathcal{U}"'] & \mathcal{C}\mathrm{at} \arrow[l, shift right=2, "\mathcal{G}"'] \arrow[l, shift left=2, "\mathrm{Int}"] \\
& \mathcal{G}\mathrm{rp} \arrow[u, shift right, "j'"'] &
\end{tikzcd}$$

ÉQUIVALENCES DE GROUPOÏDES

Tout comme les catégories, il existe plusieurs notions pertinentes pour permettre d'identifier deux groupoïdes, tout dépend de ce que l'on cherche à faire et donc du cadre dans lequel on travaille. La notion élémentaire est celle d'isomorphie. Mais on peut relâcher cette notion en celle d'*équivalence* entre groupoïdes.

Une analogie couramment utilisée est celle des espaces topologiques. On peut soit travailler avec les espaces topologique *à homéomorphisme près* ou *à homotopie près*.

☛ **Définitions.—** On dit qu'un morphisme de groupoïdes $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ est un *isomorphisme* si c'est un isomorphisme de catégories. C'est à dire si $F_0 : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{H}_0$ et $F_1 : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{H}_1$ sont des bijections.

On dit que $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ est une *équivalence* de groupoïdes si il est pleinement fidèle et si $\pi_0(F) : \pi_0(\mathcal{G}) \to \pi_0(\mathcal{H})$ est une bijection. On utilisera la notation $\mathcal{G} \simeq \mathcal{H}$ pour désigner deux groupoïdes équivalents.

La manière dont on identifie deux groupoïdes change fondamentalement la manière de faire des opérations dans la catégorie des groupoïdes. En effet, ce n'est pas la même chose de chercher objet satisfaisant une propriété universelle à isomorphisme près ou à équivalence près.

Dans le premier cas, on parlera de la *catégorie des groupoïdes* et les notions de limites et de colimites sont les mêmes que d'habitude. Dans le second cas, la structure de la catégorie des groupoïdes est modifiée et on parlera de la *2-catégorie* des groupoïdes. Cela va nous permettre d'obtenir de nouvelles constructions : les *2-limites* et les *2-colimites*. Nous aurons besoin de ces nouvelles notions afin définir ce qu'est un champ.

In fine ce que l'on souhaite, c'est pouvoir construire des opérations de limites et colimites qui ne dépende que des objets *à équivalence près*.

LA 2-CATÉGORIE DES GROUPOÏDES

Étant donné deux groupoïdes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$, nous pouvons considérer la *catégorie* des foncteurs entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$, notée $[\mathcal{G}, \mathcal{H}]$. Comme toutes les flèches sont inversibles dans un groupoïde, on remarque que toute transformation naturelle $\alpha : F \to F'$ entre deux foncteurs $F, F' : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ possède un inverse. Ainsi $[\mathcal{G}, \mathcal{H}]$ est un groupoïde et la catégorie des groupoïdes est *enrichie* sur elle-même. C'est à dire qu'entre deux groupoïdes, il y a un groupoïde de morphismes !

☛ **Définition.—** La 2-catégorie des groupoïdes est définie par :
- — Ses objets, les groupoïdes ;
- — Ses 1-morphismes, les foncteurs entre groupoïdes ;
- — Ses 2-morphismes, les transformations naturelles inversibles.

Étant donné un diagramme $p : I \to \mathcal{C}$ à valeurs dans une 2-catégorie $\mathcal{C}$, on peut définir sa 2-limite comme un 2-cône (faible) de base p, terminal dans la 2-catégorie des 2-cônes de base p. La définition étant longue à écrire — il y a de nombreuses conditions de cohérences pour les 2-flèches utilisées pour construire les 2-cônes — et les 2-cônes sont difficiles à dessiner, on se réfèrera à [Toë05] pour les détails.

Un exemple de 2-cône (faible) de base $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G} \arrow[dd, "f"] \\ \mathcal{S} \arrow[ur, "\pi_{\mathcal{G}}"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{H}}"'] \arrow[r, phantom, "\Longleftrightarrow"] & \\ & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

Le fait que le 2-cône soit faible signifie qu'il existe une transformation naturelle inversible $f \circ \pi_{\mathcal{G}} \Leftrightarrow \pi_{\mathcal{H}}$.

des calculs de 2-limites

On pourra se référer à [Hol08] et [Toë05].

Produits

Soit $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux groupoïdes. Le produit $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ est donné par

$$\mathcal{G}_1 \times \mathcal{H}_1 \underset{b_{\mathcal{G}} \times b_{\mathcal{H}}}{\overset{s_{\mathcal{G}} \times s_{\mathcal{H}}}{\rightrightarrows}} \mathcal{G}_0 \times \mathcal{H}_0$$

Le 2-produit entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$, aussi appelé *produit homotopique* et noté $\mathcal{G} \times_h \mathcal{H}$ est ici équivalent au produit classique

$$\mathcal{G} \times_h \mathcal{H} \simeq \mathcal{G} \times \mathcal{H}.$$

Produits fibrés

On se donne le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{H} \arrow[r, "T"] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

et on en cherche la limite.
La limite classique notée $\mathcal{G} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{H}$ est donné par

$$\mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{S}_1} \mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0 \times_{\mathcal{S}_0} \mathcal{H}_0$$

Le calcul de la 2-limite $\mathcal{G} \times^h_{\mathcal{S}} \mathcal{H}$ n'est cette fois-ci pas équivalent ! Les objets de $\mathcal{G} \times^h_{\mathcal{S}} \mathcal{H}$ sont les triplets (h, g, φ) où $h \in \mathcal{H}_0$, $g \in \mathcal{G}_0$ et φ est un isomorphisme entre $T(h)$ et $F(g)$ dans $\mathcal{S}$.

Passons au calcul des flèches de $\mathcal{G} \times^h_{\mathcal{S}} \mathcal{H}$. Ce sont les quadruplets formés de deux flèches $G : g \to g'$ et $H : h \to h'$ dans $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{H}_1$, ainsi que deux flèches de $\mathcal{S}$, $\varphi : F(g) \to T(h)$ et $\psi : F(g') \to T(h')$, tel que le carré suivant commute

$$\begin{tikzcd} F(g) \arrow[r, "F(G)"] \arrow[d, "\varphi"] & F(g') \arrow[d, "\psi"] \\ T(h) \arrow[r, "T(H)"] & T(h') \end{tikzcd}$$

Ces informations supplémentaires permettent de construire le 2-cône faible

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{G} \times^h_{\mathcal{S}} \mathcal{H} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{H} \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\Longleftrightarrow"] & & \mathcal{G} \arrow[dl] \\
 & \mathcal{S} &
\end{tikzcd}$$

Remarque.— Si le groupoïde $\mathcal{S}$ est équivalent au groupoïde ponctuel $j(*)$, alors $\mathcal{G} \times^h_{\mathcal{S}} \mathcal{H}$ est équivalent à $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$. On retrouve donc les calculs précédents.

Prenons un exemple pour tout de suite voir pourquoi les deux produits fibrés de sont pas équivalents. Soit T un espace topologique et considérons un point x de T et calculons la limite du diagramme $* \to \Pi_1(\mathrm{T}) \leftarrow *$ où les deux flèches partant du groupoïde ponctuel sont données par x. On trouve

$$* \times_{\Pi_1(\mathrm{T})} * = j(\{x\}) \text{ et } * \times^h_{\Pi_1(\mathrm{T})} * = j(\pi_1(\mathrm{T}, x))$$

Égalisateurs

On se donne le diagramme de groupoïdes

$$\mathcal{G} \overset{r}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathcal{H}$$

Le groupoïde égalisateur $\text{Ég}(r,t)$ est calculé étage par étage de la même manière que pour le produit fibré classique. Intéressons-nous au 2-égalisateur de r et t. Les objets du groupoïde 2-$\text{Ég}(r,t)$ sont les paires (g, φ) avec $g \in \mathcal{G}_0$ et $\varphi : r(g) \simeq t(g)$ est une flèche de $\mathcal{H}$.

Les flèches de 2-$\text{Ég}(r,t)$ sont les triplets (f, φ, ψ) où $f : g \to g'$ est une flèche de $\mathcal{G}$, $\varphi : r(g) \to t(g)$ et $\psi : r(g') \to t(g')$ des flèches de $\mathcal{H}$, tel que le carré suivant commute

$$\begin{tikzcd}
r(g) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "r(t)"] & t(g) \arrow[d, "t(f)"] \\
r(g') \arrow[r, "\psi"] & t(g')
\end{tikzcd}$$

Il y a une projection évidente $\pi : 2\text{-Ég}(r,t) \to \mathcal{G}$ et on remarque que la donnée des flèches φ est exactement équivalente à la donnée d'une 2-flèche inversible

$$r \circ \pi \Longleftrightarrow t \circ \pi$$

qui permet de construire le 2-cône faible limite.

$$\begin{tikzcd}
 & 2\text{-Ég}(r,t) \arrow[dl, "\pi_{\mathcal{G}}"'] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{G}}"] & \\
\mathcal{G} \arrow[d, "t"] \arrow[rr, phantom, "\Longleftrightarrow"] & & \mathcal{G} \arrow[d, "r"] \\
\mathcal{H} \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}"] & & \mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

Mais nous n'en avons pas terminé avec les égalisateurs. Classiquement la limite d'un diagramme cosimplicial de taille quelconque

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] & Y \arrow[l] \arrow[r, shift left=4] \arrow[r] \arrow[r, shift right=4] & Z \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift right=2] \arrow[r, shift left=6] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] \arrow[r, shift right=6] & \dots \arrow[l, shift left=4] \arrow[l] \arrow[l, shift right=4] \end{tikzcd}$$

se calcule en commençant par tronquer le diagramme et en ne prenant que les deux derniers termes (et en oubliant la codégénérescence restante). Dans le cas des 2-limites, un phénomène similaire survient : il suffit de tronquer les *trois* premiers termes, oublier des codégénérescences et de calculer.

Nous allons donc calculer la 2-limite du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, shift left=3, "d^0"] \arrow[r, shift right=3, "d^1"'] & \mathcal{H} \arrow[l, "s^0"] \arrow[r, shift left=3, "d^0"] \arrow[r, "d^1"] \arrow[r, shift right=3, "d^2"'] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

soumis aux *relations cosimpliciales* :

$$\begin{cases} d^2 d^1 = d^1 d^1 \\ d^1 d^0 = d^0 d^0 \\ d^2 d^0 = d^0 d^1 \\ s^0 d^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \\ s^0 d^1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \end{cases} \tag{1}$$

Dans ce cas, les objets de la 2-limite sont les paires (g, φ) tel que $g \in \mathcal{G}_0$ et $\varphi : d^1(g) \to d^0(g)$ une flèche de $\mathcal{H}$ telle que $s^0(\varphi) = \mathrm{Id}_x$, avec la *condition de cocycle*

$$d^1\varphi = d^0\varphi \circ d^2\varphi.$$

Les flèches de cette 2-limite sont les mêmes que celles du 2-égalisateur précédent.

Dans la construction que nous venons de donner, les morphismes φ permettent de construire toutes les 2-flèches nécessaires à la construction du 2-cône faible limite. La condition avec s^0 et la condition de cocycle permettent à toutes ces 2-flèches d'être cohérentes entre elles, ce qui est une condition nécessaire afin que toutes ces flèches et ces 2-flèches forment un 2-cône.

Formule générale d'une 2-limite

On commence par un rappel sur le calcul général de la limite d'un diagramme d'ensembles. Prenons $F : I \to \mathcal{E}ns$ un foncteur. La limite de ce diagramme est alors donnée par l'égalisateur

$$\varprojlim_{i \in I} E_i \longrightarrow \prod_{i \in I} E_i \overset{\psi}{\underset{\varphi}{\rightrightarrows}} \prod_{i \to j} E_j$$

où φ est définie par réindexation et répétition, c'est à dire $\varphi((x_i)_{i\in I}) = (x_j)_{i \to j}$ et ψ est défini à l'aide de F par $\psi((x_i)_{i \in I}) = (F(f)(x_i))_{f : i \to j}$.

La formule permettant de calculer la 2-limite d'un diagramme de groupoïdes est tout à fait similaire. Soit $\mathcal{G} : \mathrm{I} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}$ un foncteur. Sa 2-limite est donnée par le 2-égalisateur

$$2 - \varprojlim_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{G}_i \longrightarrow \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{G}_i \underset{\varphi}{\overset{\psi}{\underset{\leftarrow s^0 -}{\rightrightarrows}}} \prod_{i \to j} \mathcal{G}_j \overset{d^0}{\underset{d^2}{\underset{- d^1 \to}{\rightrightarrows}}} \prod_{i \to j \to k} \mathcal{G}_k$$

où ψ et φ sont définis comme précédemment. Le morphisme s^0 est définit par $s^0((g_{i \to j})) = (g_{\mathrm{Id}_i})$. Nous devons aussi définir le triplet (d^0, d^1, d^2). À la manière de φ, les morphismes d^0 et d^1 sont obtenus par réindexation et répétition. L'idée est la suivante : étant donné un triangle $i \to j \to k$, d^0 oublie le sommet 0 du triangle, on obtient $j \to k$ et on vient chercher le facteur $\mathcal{G}_k$ correspondant dans le produit $\prod_{i \to j} \mathcal{G}_j$. De la même manière d^1 va oublier le sommet 1 du triangle $i \to j \to k$ et donc ne retenir plus que $i \to k$.

L'application d^2 oublie de dernier sommet du triangle (on a donc plus que $i \to j$ et on utilise $\mathrm{F}(j \to k)$ ensuite (tout le monde doit terminer dans $\mathcal{G}_k$), comme pour construire φ.

☛ **En pratique.—** Si on se donne un diagramme de groupoïdes $\mathcal{G} : \mathrm{I} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}$ alors les objets de la 2-limite sont les uplets $(g_i, \varphi_{i \to j})$ avec $g_i \in \mathcal{G}_i$ et $\varphi_{i \to j} : \mathrm{F}_{i \to j}(g_i) \to g_j$ une flèche de $\mathcal{G}_j$. Le tout soumis aux conditions de cohérence

$$\text{Pour tout } i \to j \to k, \quad \varphi_{j \to k} \circ \mathrm{F}_{j \to k}(\varphi_{i \to j}) = \varphi_{i \to k}.$$

Les morphismes $f : (g_i, \varphi_{i \to j}) \to (g'_i, \varphi'_{i \to j})$ sont les uplets

$$(f_i, \varphi_{i \to j}, \varphi'_{i \to j})$$

où $f_i : g_i \to g'_i$ est une flèche dans $\mathcal{G}_i$ et tel que le carré suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}_{i \to j}(g_i) \arrow[r, "\varphi_{i \to j}"] \arrow[d, "\mathrm{F}_{i \to j}(f_i)"'] & g_j \arrow[d, "f_j"] \\ \mathrm{F}_{i \to j}(g'_i) \arrow[r, "\varphi'_{i \to j}"] & g'_j \end{tikzcd}$$

Remarque.— Si l'on applique cette recette aux exemples que nous avons donnés précédemment, on ne retrouve pas les mêmes groupoïdes. Ceux-ci sont seulement équivalents.

Un manière plus maligne de calculer une limite homotopique est de passer par « l'ensemble simplicial total ». C'est comme cela que nous avons obtenu les groupoïdes limites des exemples. Voir [Holo8].

La condition de cocycle

Nous allons appliquer ici la méthode de calcul générale d'une 2-limite au cas d'un diagramme cosimplicial sans codégéneresences. Le but sera uniquement de mettre à jour la provenance de la condition de cocycle. On se donne le diagramme de groupoïdes

$$\mathcal{G} \overset{d^0}{\underset{d^1}{\rightrightarrows}} \mathcal{H} \overset{d^0}{\underset{d^2}{\underset{- d^1 \to}{\rightrightarrows}}} \mathcal{S}$$

avec les relations cosimpliciales habituelles.

La méthode de calcul générale nous dit que les éléments d'un groupoïde représentant la 2-limite sont donnés par les triplets $(g, h, s) \in \mathcal{G}_0 \times \mathcal{H}_0 \times \mathcal{S}_0$, ainsi que des flèches

$$\begin{cases} \eta : d^0 g \to h \\ \theta : d^1 g \to h \\ \iota : d^0 h \to s \\ \kappa : d^1 h \to s \\ \lambda : d^2 h \to s \\ \mu : d^0 d^0 g \to s \\ \nu : d^0 d^1 g \to s \\ \xi : d^1 d^1 g \to s \end{cases} \tag{2}$$

On posera aussi $\varphi = \eta^{-1} \circ \theta$ afin de faire ressortir la condition de cocycle.

Les conditions de compatibilités sont réunies dans le triangle suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & d^0d^1g \arrow[dl, "d^2\eta"] \arrow[dr, "d^0\eta"] \arrow[dd, "\nu"] \arrow[rrddd, bend left, "d^0\varphi"] & & \\
 & d^2h \arrow[dr, "\lambda"] & & d^0h \arrow[dl, "\iota"] & \\
 & & s & & \\
d^1d^1g \arrow[uur, "d^2\theta"] \arrow[urr, "\xi"] \arrow[rr, "d^1\theta"] \arrow[uuurr, bend left, "d^2\varphi"] \arrow[rrrr, bend right, "d^1\varphi"] & & d^1h \arrow[u, "\kappa"] & & d^0d^0g \arrow[uul, "d^0\theta"] \arrow[ull, "\mu"] \arrow[ll, "d^1\eta"]
\end{tikzcd}$$

Les conditions de compatibilité indiquent que tous les triangles internes commutent. Cela a pour conséquence de faire commuter le grand triangle externe. Nous obtenons alors

$$d^1\varphi = d^0\varphi \circ d^2\varphi$$

des calculs de 2-colimites

Comme à la section précédente, on peut se référer à [Hol08]. On peut aussi regarder du côté de [Dug08].

Coproduits

Tout comme pour le produit de deux groupoïdes, le 2-coproduit est équivalent au coproduit. Voici comment le calculer. Soit $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux groupoïdes, leur coproduit $\mathcal{G} \amalg \mathcal{H}$ se calcule simplement comme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_1 \amalg \mathcal{H}_1 \arrow[r, shift left, "s_\mathcal{G} \amalg s_\mathcal{H}"] \arrow[r, shift right, "b_\mathcal{G} \amalg s_\mathcal{H}"'] & \mathcal{G}_0 \amalg \mathcal{H}_0 \end{tikzcd}$$

Somme amalgamée

On se donne un diagramme de groupoïdes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"] & \mathcal{H} \\ \mathcal{G} & \end{tikzcd}$$

Un représentant de la somme amalgamée homotopique est donné par le groupoïde

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_1 \amalg \mathcal{S}_1 \amalg \mathcal{H}_1 \arrow[r, shift left=2, "s_\mathcal{G} \amalg s_\mathcal{G} \circ g \amalg s_\mathcal{H}"] \arrow[r, shift right=2, "b_\mathcal{G} \amalg b_\mathcal{H} \circ h \amalg b_\mathcal{H}"'] & \mathcal{G}_0 \amalg \mathcal{H}_0 \arrow[l, "i_\mathcal{G} \amalg i_\mathcal{H}" description] \end{tikzcd}$$

Diagrammes simpliciaux

De même que pour les limites de diagrammes cosimpliciaux, calculer les 2-colimites de diagrammes simpliciaux de groupoïdes ne nécessite que les trois premiers étages. On se place donc directement dans ce cas. Soit

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, shift left=2, "\partial_0"] \arrow[r, "\partial_1" description] \arrow[r, shift right=2, "\partial_2"'] & \mathcal{H} \arrow[r, shift left=2, "\partial_0"] \arrow[r, shift right=2, "\partial_1"'] & \mathcal{S} \arrow[l, "\sigma_0" description] \end{tikzcd}$$

soumis aux *relations simpliciales* :

$$\begin{cases} \partial_0 \partial_1 = \partial_0 \partial_0 \\ \partial_0 \partial_2 = \partial_1 \partial_0 \\ \partial_1 \partial_2 = \partial_1 \partial_1 \\ \partial_0 \sigma_0 = \mathrm{Id}_\mathcal{S} \\ \partial_1 \sigma_0 = \mathrm{id}_\mathcal{S} \end{cases} \tag{3}$$

Pour le calcul des 2-colimites nous allons utiliser un théorème de Thomason [Tho79] : la colimite homotopique d'un ensemble simplicial d'ensemble simpliciaux est donnée par la diagonale de cet objet.

Ainsi, les objets de la 2-colimite sont les objets de $\mathcal{S}$. Les flèches sont obtenues en quotientant $\mathcal{H}_1$ par la relation d'équivalence $\partial_0 \varphi \circ \partial_2 \psi \sim \partial_1 \theta$ pour tout triplet (φ, ψ, θ) dans $\mathcal{G}_1$ avec $\theta = \varphi \circ \psi$. Il s'agit donc du groupoïde

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_1/\!\sim \arrow[r, shift left=2, "b_\mathcal{S} \circ \partial_0"] \arrow[r, shift right=2, "s_\mathcal{S} \circ \partial_1"'] & \mathcal{S}_0 \arrow[l, "\sigma_0 \circ i_\mathcal{S}" description] \end{tikzcd}$$

Un exemple typique : soit E un ensemble et G un groupe agissant sur E. On note alors [E/G] la 2-colimite du diagramme

$$j(\mathrm{G}) \times j(\mathrm{G}) \times j(\mathrm{E}) \overset{\partial_0}{\underset{\partial_2}{\overset{\partial_1}{\rightrightarrows}}} j(\mathrm{G}) \times j(\mathrm{E}) \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\overset{\sigma_0}{\leftarrow}\!\!\rightrightarrows}} j(\mathrm{E}) \longrightarrow [\mathrm{E}/\mathrm{G}]$$

où ∂_0 eſt l'action $(g, h, x) \mapsto (g, h.x)$, ∂_1 eſt la multiplication $(g, h, x) \mapsto (gh, x)$ et ∂_2 eſt la projection $(g, h, x) \mapsto (h, x)$. Pour le couple (∂_0, ∂_1), ∂_0 eſt l'action et ∂_1 eſt la projection sur E. Enfin $\sigma_0(x) = (e, x)$ où e eſt le neutre du groupe G.

☛ **Définition.—** Le quotient $[*/\mathrm{G}]$ eſt appelé $\mathcal{B}\mathrm{G}$, c'eſt le groupoïde classifiant du groupe G.

Formule générale d'une 2-colimite

À la manière du calcul des limites homotopiques, étant donné un diagramme de groupoïdes $\mathcal{G} : \mathrm{I} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}$, sa colimite homotopique peut être calculée comme la colimite du diagramme simplicial

$$\coprod_{i \to j \to k} \mathcal{G}_i \;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}\; \coprod_{i \to j} \mathcal{G}_i \;\substack{\longrightarrow\\\longleftarrow\\\longrightarrow}\; \coprod_{i} \mathcal{G}_i \longrightarrow 2 - \varinjlim_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{G}_i$$

☛ **En pratique.—** Une manière naïve de calculer la colimite homotopique d'un diagramme $\mathcal{G} : \mathrm{I} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}$ eſt de prendre pour ensemble d'objets la somme $\coprod_{i \in \mathrm{I}} (\mathcal{G}_i)_0$ et de prendre pour les flèches l'ensemble engendré par les $(\mathcal{G}_i)_1$ et en ajoutant une nouvelle flèche $f_{g_i \to g_j} : g_i \to g_j$ pour toute flèche $\varphi_{i \to j} : \mathcal{G}(i \to j)(g_i) \to g_j$. On termine en quotientant par les relations $f_{g_i \to g_k} = f_{g_j \to g_k} \circ f_{g_i \to g_j}$ pour tout triangle $i \to j \to k$ avec $\varphi_{j \to k} \circ \mathcal{G}(j \to k)(\varphi_{i \to j}) = \mathcal{G}(i \to k)(\varphi_{i \to k})$.

Remarque.— Une manière plus maligne de faire le calcul eſt d'utiliser la diagonale du diagramme simplicial que nous avons décrit juſte avant. Voir [Hol08].

la définition d'un champ

La référence pour cette partie eſt [Toë05].

Définition.— *Soit* (C, τ) *un site. Un foncteur* $\mathcal{F} : \mathrm{C}^{op} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}$ *eſt un champ si pour tout* $\mathrm{X} \in \mathrm{C}$ *et toute famille couvrante* $\{\mathrm{U}_i \to \mathrm{X}\}$*, le morphisme naturel*

$$\mathcal{F}(\mathrm{X}) \to 2 - \varprojlim \left(\prod_i \mathcal{F}(\mathrm{U}_i) \overset{d^0}{\underset{d^1}{\overset{s^0}{\leftarrow}\!\!\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(\mathrm{U}_{ij}) \overset{d^0}{\underset{d^2}{\overset{d^1}{\rightrightarrows}}} \prod_{i,j,k} \mathcal{F}(\mathrm{U}_{ijk}) \right)$$

où U_{ij} *désigne l'intersection* $\mathrm{U}_i \times_{\mathrm{X}} \mathrm{U}_j$ *et* U_{ijk} *la triple intersection* $\mathrm{U}_{ij} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{U}_{jk}$.

Précisons quels sont les foncteurs en jeu. Le foncteur s^0 eſt la projection sur $\prod_i \mathcal{F}(\mathrm{U}_{i,i})$. La composante (i_0, j_0) de $d^0 : \prod_i \mathcal{F}(\mathrm{U}_i) \to \prod_{i,j} \mathcal{F}(\mathrm{U}_{ij})$ eſt donnée par la composée $\prod_i \mathcal{F}(\mathrm{U}_i) \to \mathcal{F}(\mathrm{U}_{j_0}) \to \mathcal{F}(\mathrm{U}_{i_0,j_0})$.

De même la composante (i_0, j_0) de d^1 eſt la composée $\prod_i \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(U_{i_0}) \to \mathcal{F}(U_{i_0,j_0})$. Le triplet (d^0, d^1, d^2) eſt défini de la même manière par projeɥion puis reſtriɥion.

Le but de cette dernière partie eſt de détailler la preuve de la proposition suivante.

Proposition.— *Un fonɥeur* $\mathcal{F} : C^{op} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}$ *eſt un champ si et seulement si :*

— *Pour tout* $X \in C$, *toute famille couvrante* $\{U_i \to X\}$, *toute famille d'objets* $x_i \in \mathcal{F}(U_i)$ *et toute famille d'isomorphismes dans* $\mathcal{F}(U_{ij})$

$$\varphi_{ij} : x_i|_{U_{ij}} \to x_j|_{U_{ij}}$$

vérifiant

$$\varphi_{ik}|_{U_{ijk}} = \varphi_{jk}|_{U_{ijk}} \circ \varphi_{ij}|_{U_{ijk}}, \quad \varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{U_i}$$

il exiſte $x \in \mathcal{F}(X)$ *et des isomorphismes* $\psi_i : x_{|U_i} \to x_i$ *tel que*

$$\varphi_{ij} = \psi_i^{-1}|_{U_{ij}} \circ \psi_i|_{U_{ij}}$$

— *Pour tout* $X \in C$ *et toute paire d'objets* $(x, y) \in \mathcal{F}(X)$, *le fonɥeur*

$$Iso(x,y) : (U \to X) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(U)}(x_{|U}, y_{|U})$$

eſt un faisceau sur le site $C_{/X}$.

Démonſtration.— D'après ce que nous avons dit précédemment, la première condition eſt équivalente à l'essentielle surjeɥivité du morphisme

$$\mathcal{F}(X) \to 2-\varprojlim \left(\prod_i \mathcal{F}(U_i) \underset{d^1}{\overset{d^0}{\underset{\leftarrow s^0 -}{\rightrightarrows}}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{ij}) \underset{d^2}{\overset{d^0}{\underset{- d^1 \to}{\rightrightarrows}}} \prod_{i,j,k} \mathcal{F}(U_{ijk}) \right)$$

Il s'agira donc de montrer que la seconde condition eſt équivalente à la pleine fidélité du morphisme ci-dessus pour tout objet $X \in C$ et toute famille couvrante $\{U_i \to X\}$. Pour une telle donnée, on appellera $\mathcal{G}(\{U_i\})$ la 2-limite du diagramme ci-dessus.

Prenons un objet $X \in C$ un recouvrement $\{U_i \to X\}$ et deux objets $x, y \in \mathcal{F}(X)$. L'image de x dans $\mathcal{G}(\{U_i\})$ eſt l'objet $(x_{|U_i}, \mathrm{Id}_{ij})$. Ce faisant, un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\{U_i\})}(x,y)$ eſt une famille d'isomorphismes $\psi_i : x_{|U_i} \to y_{|U_i}$ tel que

$$\psi_i|_{U_{ij}} = \psi_j|_{U_{ij}}$$

Cela signifie que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\{U_i\})}(x,y)$ peut être obtenu comme la limite

$$\varprojlim \left(\prod_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(U_i)}(x_{|U_i}, y_{|U_i}) \Longrightarrow \prod i, j\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(U_{ij})}(x_{|U_{ij}}, y_{|U_{ij}}) \right)$$

Si $Iso(x,y)$ eſt un faisceau, alors on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(X)}(x,y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\{U_i\})}(x,y)$ et le fonɥeur $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(\{U_i\})$ eſt pleinement fidèle.

Inversement si ce dernier eſt pleinement fidèle, alors pour tout $X \in C$ et tout recouvrement $\{U_i \to X\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(X)}(x,y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(\{U_i\})}(x,y)$ et le fonɥeur $Iso(x,y)$ eſt un faisceau pour tout couple $x, y \in \mathcal{F}(X)$. □

[Ath06] Christos A Athanasiadis. *Algebraic and Geometric Combinatorics: Euroconference in Mathematics: Algebraic and Geometric Combinatorics, August 20-26, 2005, Anogia, Crete, Greece*, volume 10. American Mathematical Soc., 2006.

[Bos07] Rogier David Bos. *Groupoids in geometric quantization*. UB Nijmegen [Host], 2007.

[Bra27] Heinrich Brandt. Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes. *Mathematische Annalen*, 96(1):360–366, 1927.

[Bro67] Ronald Brown. Groupoids and van kampen's theorem. In *Proc. London Math. Soc.(3)*, volume 17, pages 385–401. Citeseer, 1967.

[CCGF+99] José F Cariñena, Jesús Clemente-Gallardo, Eduardo Follana, José M Gracia-Bondía, Alejandro Rivero, and Joseph C Várilly. Connes' tangent groupoid and strict quantization. *Journal of Geometry and Physics*, 32(2):79–96, 1999.

[DS14] Claire Debord and Georges Skandalis. Pseudodifferential extensions and adiabatic deformation of smooth groupoid actions. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2014.

[Dug08] Daniel Dugger. A primer on homotopy colimits. *preprint*, 2008.

[Hol08] Sharon Hollander. A homotopy theory for stacks. *Israel Journal of Mathematics*, 163(1):93–124, 2008.

[MM03] Ieke Moerdijk and Janez Mrcun. *Introduction to foliations and Lie groupoids*, volume 91. Cambridge University Press, 2003.

[RR01] Arlan Ramsay and Jean Renault. *Groupoids in Analysis, Geometry, and Physics: AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference on Groupoids in Analysis, Geometry, and Physics, June 20-24, 1999, University of Colorado, Boulder*, volume 282. American Mathematical Soc., 2001.

[Tho79] Robert W Thomason. Homotopy colimits in the category of small categories. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 85, pages 91–109. Cambridge Univ Press, 1979.

[Toë05] Bertrand Toën. A master course on algebraic stacks, 2005. URL: http://perso.math.univ-toulouse.fr/btoen/videos-lecture-notes-etc.

[Wei91] Alan Weinstein. Symplectic groupoids, geometric quantization, and irrational rotation algebras. In *Symplectic Geometry, Groupoids, and Integrable Systems*, pages 281–290. Springer, 1991.